ECOLE NATIONALE DE L'AVIATION CIVILE — MAI 1980

CONCOURS DE RECRUTEMENT DES
INGENIEURS DES ETUDES ET DE L'EXPLOITATION DE L'AVIATION CIVILE ET DES INGENIEURS TITULAIRES

EPREUVE OPTIONNELLE DE MATHEMATIQUES

Durée : 4 H 00
Coef. : 2

## PREAMBULE

$(a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots)$ et $(b_o, b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots)$ sont deux suites de réels telles que $b_n \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On considère la suite $(C_o, C_1, C_2, \ldots, C_n \ldots)$ ainsi construite :

$$C_o = b_o$$

$$C_1 = b_o + \frac{a_1}{b_1}$$

$$C_2 = b_o + \cfrac{a_1}{b_1 + \cfrac{a_2}{b_2}}$$

. . . . . .

$$C_n = b_o + \cfrac{a_1}{b_1 + \cfrac{a_2}{b_2 + \cfrac{a_3}{b_3 + \ddots \cfrac{a_{n-1}}{b_{n-1} + \cfrac{a_n}{b_n}}}}}$$

$C_n$ étant obtenu en remplaçant $b_{n-1}$ par $b_{n-1} + \frac{a_n}{b_n}$ dans $C_{n-1}$ et les suites $(a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots)$ et $(b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots)$ étant supposées telles que $C_n$ soit défini pour tout $n$. (Il en est ainsi par exemple si les éléments de ces deux dernières suites sont tous strictement positifs).

On peut représenter $C_n$ à l'aide de l'écriture commode :

$$C_n = b_o + \frac{a_1}{|b_1|} + \frac{a_2}{|b_2|} + \ldots \frac{a_n}{|b_n|}$$



## PREMIERE PARTIE

I.1. - $(B_o, B_1, \ldots, B_n, \ldots)$ est la suite de réels définie par :

$B_o = 1$ , $B_1 = b_1$ et pour tout $k \geq 2$ par la relation

[1] : $B_k = b_k B_{k-1} + a_k B_{k-2}$

et on pose $A_k = C_k B_k$ .

Vérifier que $A_k$ ne dépend que des éléments $a_j$, $b_j$ de rang au plus égal à k.

Calculer $A_o$, $A_1$, $A_2$ et démontrer que les éléments de la suite $(A_o, A_1, \ldots, A_n, \ldots)$ vérifient pour $k \geq 2$ :

[2] : $A_k = b_k A_{k-1} + a_k A_{k-2}$

I.2. - Démontrer que pour tout $n \geq 1$ les éléments de la suite $(C_o, C_1, \ldots, C_n, \ldots)$ vérifient la relation

[3] : $C_n - C_{n-1} = (-1)^{n-1} \frac{a_1 a_2 \ldots a_n}{B_{n-1} B_n}$



. . . /. . .

En déduire que pour tout $n \geq 1$ on a la relation

[4] : $$C_n - b_o = \frac{a_1}{B_o B_1} - \frac{a_1 a_2}{B_1 B_2} + \ldots + (-1)^{n-1} \frac{a_1 a_2 \ldots a_n}{B_{n-1} B_n}$$

I.3. - Montrer que si $a_k \neq o$ pour tout $k \leq n$, et $a_{n+1} = 0$, alors $C_n$ est défini pour tout n et que la suite $(C_o, C_1, \ldots, C_n, \ldots)$ est convergente.

I.4. - Exprimer $b_o$, $a_1$ et $b_1$ en fonction de $B_1$, $C_o$ et $C_1$.

Pour $k \geq 2$ exprimer $a_k$ et $b_k$ d'abord en fonction de $A_k$, $A_{k-1}$, $A_{k-2}$, $B_k$, $B_{k-1}$ et $B_{k-2}$, puis en fonction de $B_k$, $B_{k-1}$, $B_{k-2}$, $C_k$, $C_{k-1}$ et $C_{k-2}$.

I.5. - Soit une suite $(C_o, C_1, \ldots, C_n, \ldots)$ supposée convergente vers une limite C, dont les éléments sont représentés par :

$$C_n = b_o + \frac{a_1}{|b_1|} + \ldots + \frac{a_n}{|b_n|}$$

et $(d_1, d_2, \ldots, d_n, \ldots)$ une suite de réels tous non nuls.

On considère la suite $(C'_o, C'_1, \ldots, C'_n, \ldots)$ dont les éléments sont définis par :

$$C'_n = b_o + \frac{d_1 a_1}{|d_1 b_1|} + \frac{d_1 d_2 a_2}{|d_2 b_2|} + \ldots + \frac{d_{n-1} d_n a_n}{|d_n b_n|}$$

a) Montrer que $C_n = C'_n$ pour tout n.





b) On considère le cas particulier où :

$b_o = o$, $a_1 = b_1 = 1$ et où $B_n \neq o$ pour tout n et on pose :

$$\rho_k = -\frac{a_{k+1} B_{k-1}}{B_{k+1}} \quad , \quad k \geq 1$$

Montrer qu'on peut construire une suite $(d_1, d_2, \ldots, d_n, \ldots)$ telle que :

$$C'_o = 0$$

$$C'_1 = 1$$

[5] : $$C'_n = \left|\frac{1}{1}\right| - \left|\frac{\rho_1}{1 + \rho_1}\right| - \left|\frac{\rho_2}{1 + \rho_2}\right| \ldots - \left|\frac{\rho_{n-1}}{1 + \rho_{n-1}}\right| \quad n \geq 2$$

et

$$C'_n = C_n \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

et donner, pour tout n, l'expression de $d_n$ en fonction de $B_n$ et $B_{n-1}$.

c) En utilisant la relation [5] , calculer $C'_2$, $C'_3$, $C'_4$.

Montrer que $C'_n$ peut s'écrire sous la forme

$$\frac{1}{1 - \dfrac{\rho_1}{\rho_1 + \dfrac{1}{C''_n}}} \quad \text{avec } C''_n = \left|\frac{1}{1}\right| - \left|\frac{\rho_2}{1 + \rho_2}\right| \ldots - \left|\frac{\rho_{n-1}}{1 + \rho_{n-1}}\right| \quad \text{pour } n \geq 3.$$

$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $y \neq o$ et $xy \neq -1$ simplifier l'expression

$$\frac{1}{1 - \dfrac{x}{x + \dfrac{1}{y}}} .$$

. . . / . . .

Appliquer le résultat de cette simplification pour en déduire une expression simple de $C'_n$ pour tout $n$ entier positif.

Utilisant la relation [4] de la question I.2., exprimer $C_n$ en fonction des $\rho_k$ et retrouver que $C_n = C'_n$ pour tout $n$ entier positif.

I.6. - On considère une série convergente, de terme général $u_n \in \mathbb{R}$ tel que $u_n \neq 0$ pour tout $n$, et on pose :

$$S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$$

Montrer que l'on peut associer à cette série deux suites $(b_0, b_1, \ldots b_n \ldots)$ et $(a_1, a_2, \ldots a_n \ldots)$ telles que pour tout $n$ on ait :

$$S_n = b_0 + \frac{a_1}{|b_1|} + \ldots + \frac{a_n}{|b_n|}$$

APPLICATION :

Déterminer les deux suites $(b_0, b_1, \ldots, b_n, \ldots)$ et $(a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots)$ dans le cas particulier où $u_n$ est le terme général du développement en série entière de $\log(1 + x)$, que l'on écrira en précisant son rayon de convergence.



## DEUXIEME PARTIE

Soit $(a_0, a_1, \ldots a_n, \ldots)$ une suite de réels strictement positifs dont le premier terme $a_0$ est donné et vérifiant pour tout $n \geq 1$ la relation de récurrence

$$a_n = \frac{1}{a_{n-1} - E(a_{n-1})}$$

(où $E(x)$ désigne la partie entière de $x$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$).

On supposera qu'une telle suite est définie, c'est-à-dire que $a_0$ est tel que pour tout $n \geq 0$ le réel $a_n$ n'est pas entier.

II.1 - Montrer que pour qu'il en soit ainsi, il est nécessaire que $a_0$ ne soit pas un nombre rationnel ; établir le caractère suffisant de cette condition.

Dans toute la suite du problème on supposera $a_0$ irrationnel et strictement positif.

On pose $u_n = E(a_n)$ pour tout $n \geq 0$, exprimer $u_n$ en fonction de $a_n$ et $a_{n+1}$ ; montrer que :

$$u_n > 0 \quad \text{pour tout} \quad n \geq 1 .$$

On se propose d'étudier la suite $(C_0, C_1, \ldots, C_n, \ldots)$ construite à

partir des deux suites $(a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots)$ et $(b_0, b_1, \ldots, b_n, \ldots)$ définies par :

$$a_n = 1 \quad , n \geq 1 \quad ; \quad b_n = u_n \quad , n \geq 0 \quad ,$$

c'est-à-dire que $C_n$ est représenté par l'expression

[6] : $$C_n = u_0 + \frac{1}{|u_1|} + \ldots + \frac{1}{|u_n|} \quad ;$$

et on se propose de montrer que $\lim_{n \to \infty} C_n = \alpha_0$.

a) Ecrire dans ce cas particulier où

$$a_n = 1 \quad \forall\, n \geq 1 \quad , b_n = u_n \quad \forall\, n \geq 0$$

les relations [1] et [2] du I.1. liant les $A_n$ et $B_n$ associés aux $C_n$.

Montrer que $A_n$ et $B_n$ sont strictement positifs pour tout $n \geq 1$.

b) Montrer que la suite $(B_0, B_1, \ldots, B_n, \ldots)$ est strictement croissante et étudier la limite de $B_n$ lorsque n tend vers l'infini.

c) Montrer que pour tout $n \geq 1$

$$C_{n+1} = \frac{A_n u_{n+1} + A_{n-1}}{B_n u_{n+1} + B_{n-1}} \quad \text{et} \quad \alpha_0 = \frac{A_n \alpha_{n+1} + A_{n-1}}{B_n \alpha_{n+1} + B_{n-1}}$$

Etendre la validité de cette dernière formule à $n = 0$ grâce à une définition convenable de $A_{-1}$ et $B_{-1}$ permettant de respecter les relations [1] et [2].

En déduire que pour n strictement positif $\alpha_0$ est compris entre $C_{n-1}$ et $C_n$.



Etudier $\frac{A_n}{B_n} - \frac{A_{n-1}}{B_{n-1}}$ pour $n \geq 1$ et en déduire que

$$|\alpha_0 - C_n| < \frac{1}{B_n B_{n-1}}$$

En conclure que $\alpha_0 = \lim_{n \to \infty} C_n$

II.2 - Une suite d'éléments $C_n = u_0 + \frac{1}{|u_1|} + \frac{1}{|u_2|} + \ldots + \frac{1}{|u_n|}$ est dite périodique de période p s'il existe un entier m tel que la suite des $u_n$ soit de la forme :

$$(u_0, u_1 \ldots, u_m, u_{m+1}, \ldots, u_{m+p-1}, u_{m+1}, \ldots, u_{m+p-1}, u_n, \ldots)$$

Une telle suite est dite périodique simple de période p si $m = 0$.

a) Montrer que si $C_n$ est élément d'une suite périodique simple de période p, alors $u_0 > 0$.

b) Soit $\alpha_0$ un irrationnel et $(C_0, C_1, \ldots, C_n, \ldots)$ la suite définie par l'expression [6] du II.1. et dont $\alpha_0$ est la limite. Montrer que si cette suite est périodique simple de période p :

$$\alpha_0 = \frac{\alpha_0 A_{p-1} + A_{p-2}}{\alpha_0 B_{p-1} + B_{p-2}}$$

On pourra considérer la suite de terme $C'_n$ définie à partir de $\alpha_p$ de la même manière que la suite de terme $C_n$ a été définie à partir de $\alpha_0$ et en déduire en utilisant II.1. c) que $\alpha_p = \alpha_0$.

En déduire que $\alpha_0$ est racine d'une équation du second degré dont l'autre racine est comprise strictement entre 0 et -1.

- - - / - - -

c) Soit une équation $Ux^2 + Vx - W = 0$ possédant la propriété (P) suivante :

i) U, V, W sont des entiers tels que $U > 0$ et $W > 0$

ii) Elle admet deux racines $\alpha_o$ et $\beta_o$ distinctes telles que

$\alpha_o > 1$ et $-1 < \beta_o < 0$.

On se propose de montrer que la suite $(C_o, C_1, \ldots, C_n, \ldots)$, définie par l'expression [6] du II.1 et dont $\alpha_o$ est la limite, est périodique simple.

Soit $u_o = E(\alpha_o)$, on pose $\alpha_o = u_o + \frac{1}{\alpha_1}$ .

Montrer que $\alpha_1$ est solution d'une équation de second degré

$$U_1 x^2 + V_1 x - W_1 = 0.$$

possédant la propriété (P) et telle que :

$$V_1^2 + 4 U_1 W_1 = V^2 + 4 U W.$$

On pose $u_1 = E(\alpha_1)$ et $\alpha_2 = \frac{1}{\alpha_1 - u_1}$

$$u_{n-1} = E(\alpha_{n-1}) \text{ et } \alpha_n = \frac{1}{\alpha_{n-1} - u_{n-1}} .$$

Démontrer que $\alpha_n$ est solution d'une équation

$U_n x^2 + V_n x - W_n = 0$ possédant la propriété (P) et telle que

$$V_n^2 + 4 U_n W_n = V^2 + 4 U W.$$



Sans chercher leur valeur, montrer qu'il existe un entier p et un entier m tels que :

$$(U_{m+p}, V_{m+p}, W_{m+p}) = (U_m, V_m, W_m)$$

En déduire que la suite $(C_o, C_1, \ldots, C_n, \ldots)$, dont $\alpha_o$ est la limite, est périodique de période p puis, raisonnant par l'absurde, montrer que $m = 0$.

II.3 - Utilisant les résultats précédents :

a) Déterminer la limite de la suite $(C_o, C_1, \ldots, C_n, \ldots)$ périodique simple de période 1 telle que $C_o = a$ et $C_n = a + \left|\frac{1}{a}\right| + \ldots + \left|\frac{1}{a}\right|$ où a est entier positif.

b) Déterminer la suite $(C_o, C_1, \ldots, C_n, \ldots)$ dont la limite est :

$\alpha = \frac{ab + \sqrt{a^2b^2 + 4ab}}{2b}$ racine de l'équation $bx^2 - abx - a = 0$

où a et b sont entiers positifs.

---

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes




Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail